

ทฤษฎีบท 5

ให้ a_n เป็นลำดับของจำนวนจริงที่มากกว่าหรือเท่ากับศูนย์ L เป็นจำนวนจริง และเป็นจำนวนเต็มที่มากกว่าหรือเท่ากับสอง จะได้ว่า

$$\text{ถ้า } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \text{ แล้ว } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n} = \sqrt[n]{L}$$

ตัวอย่างที่ 29

จงหาลิมิตของลำดับ เมื่อ $a_n = \sqrt{\frac{4n-1}{n+1}}$

วิธีทำ เนื่องจาก

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n-1}{n+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(4 - \frac{1}{n} \right)}{n \left(1 + \frac{1}{n} \right)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 - \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}} \\ &= \frac{4-0}{1+0} = \frac{4}{1} = 4 \end{aligned}$$

จากทฤษฎีบท 5 จะได้

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{4n-1}{n+1}} &= \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n-1}{n+1}} \\ &= \sqrt{4} \\ &= 2 \end{aligned}$$

ในการแสดงว่าลำดับที่กำหนดให้นั้นลู่ออก นอกจากการพิจารณากราฟแล้ว ยังสามารถใช้กฎต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 4

ให้ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ เป็นลำดับซึ่ง $a_n \neq 0$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

ถ้า $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0$ แล้ว ลำดับ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ จะลู่ออก

ตัวอย่างที่ 27

จงตรวจสอบว่าลำดับ $a_n = \frac{n^2}{n+1}$ เป็นลำดับที่เข้าหรือลำดับลู่ออก

วิธีทำ เนื่องจาก

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \\ &= 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

จากทฤษฎีบท 4 จะได้ว่าลำดับ a_n ลู่ออก

ข้อสังเกต จากตัวอย่างที่ 27 ลิมิตของลำดับที่พจน์ทั่วไปอยู่ในรูปของเศษส่วนของพหุนาม ถ้าของพหุนามที่เป็นตัวส่วนน้อยกว่าตัวเศษของพหุนามที่เป็นตัวเศษแล้ว ลำดับจะลู่ออก

ให้ r เป็นจำนวนจริง จะได้ตัวว่า

จำกัด $\lim_{r \rightarrow \infty} r^{\alpha} = 0$ และ $\lim_{r \rightarrow \infty} r^{\beta} = \infty$ ถ้า $\alpha < 0$ และ $\beta > 0$

ให้ a_n, b_n, c_n เป็นลำดับของจำนวนจริง A, B เป็นจำนวนจริง และ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ โดยที่ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ และ $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$ จะได้ว่า

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a = A \text{ und } \lim_{x \rightarrow +\infty} b = B$$

ถ้า $t = c$ ทุกจำนวนเต็ม n แล้ว $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c = c$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} c a_n = c \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = cA$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

4. $\lim (a_n - b_n) = \lim a_n - \lim b_n = a - b$

5. $\lim_{x \rightarrow c} (a_x \cdot b_x) = \lim_{x \rightarrow c} a_x \cdot \lim_{x \rightarrow c} b_x = AB$

5. $\lim_{x \rightarrow a} (a_x \cdot b_x) = \lim_{x \rightarrow a} a_x \cdot \lim_{x \rightarrow a} b_x = A$
6. ถ้า $b \neq 0$ ทุกค่า x ในบริเวณที่ $x \rightarrow a$ และ $B \neq 0$ แล้ว $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{a_x}{b_x} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow a} a_x}{\lim_{x \rightarrow a} b_x} = \frac{A}{B}$

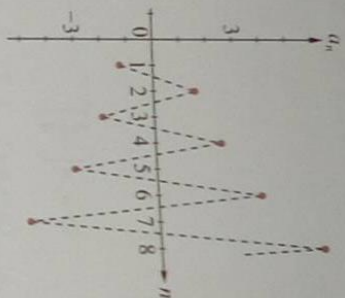
องศาอิสระของลำดับ เมื่อ $d_s = 5$

วิธีทำ

เนื่องจาก 5 เป็นค่าคงตัว ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 0} 5 = 5$

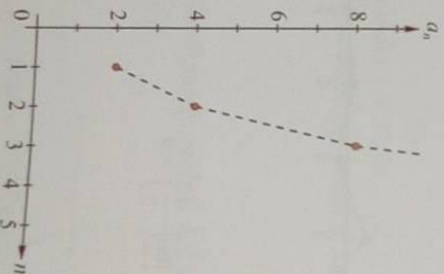
2) จาก $a_n = \left(-\frac{5}{4}\right)^n$ เขียนลำดับได้เป็น $-\frac{5}{4}, \frac{25}{16}, -\frac{125}{64}, \dots, \left(-\frac{5}{4}\right)^n, \dots$

เขียนกราฟของลำดับได้ดังนี้



จากกราฟ จะได้ว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{5}{4}\right)^n$ ไม่มีค่า

3) จาก $a_n = 2^n$ เขียนลำดับได้เป็น $2, 4, 8, \dots, 2^n, \dots$
เขียนกราฟของลำดับได้ดังนี้



จากกราฟ จะได้ว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n$ ไม่มีค่า

ทฤษฎีบท 1

ให้ r เป็นจำนวนจริงบวก จะได้ว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^r} = 0$ และ $\lim_{n \rightarrow \infty} n^r$ ไม่มีค่า



ตัวอย่างที่ 2.2

จงหาลิมิตของลำดับ เมื่อ

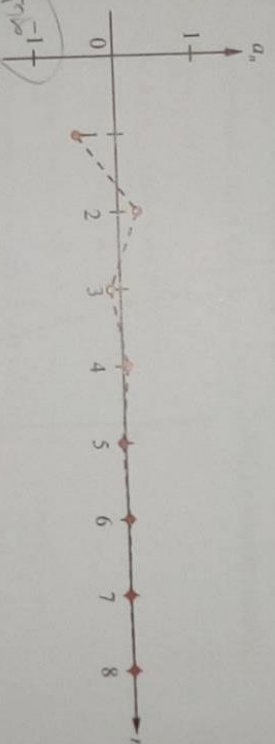
1) $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

2) $a_n = \left(-\frac{5}{4}\right)^n$

3) $a_n = 2^n$

วิธีทำ 1) จาก $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ เขียนลำดับได้เป็น $-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \dots, \left(-\frac{1}{2}\right)^n, \dots$

เขียนกราฟของลำดับได้ดังนี้



ลำดับนี้มีลิมิต

จากการพล็อตได้ว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$

หรือ
1) $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

(ลิมิตของ 1) a_n

(ลิมิตของ 1) a_n

$= 0$ ลิมิต



เตรียมมอง ค้างคาวตัว e

e ซึ่งเป็นจำนวนอตรรกยะ มีค่าประมาณ 2.71828 นั้น ได้รับการค้นพบโดย Jacob Bernoulli ใน ค.ศ. 1683 ในขณะศึกษาเกี่ยวกับดอกเบี้ยทบต้น โดยถ้ากำหนดลำดับ $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ จะได้ว่า $a_1 = 2$, $a_2 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2.2500$, $a_3 = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 \approx 2.370$ และเมื่อ n มากขึ้นเรื่อย ๆ จะได้ $a_{1,000} \approx 2.7169$, $a_{10,000} \approx 2.7181$, $a_{100,000} \approx 2.7183$ และเมื่อ n มากขึ้นต่อไปมีที่สิ้นสุดแล้ว ลำดับ a_n จะเข้าค่าที่ 2.71828182849... นั่นคือ $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

ตัวอย่างที่ 21

จงหาลิมิตของลำดับ เมื่อ

1) $a_n = \frac{1}{n^2}$

2) $a_n = n^3$

วิธีทำ 1) จาก $a_n = \frac{1}{n^2}$ เขียนลำดับได้เป็น $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \dots, \frac{1}{n^2}, \dots$

จะเห็นว่า เมื่อ n มากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุด พจน์ที่ n ของลำดับจะลดลงและเข้าใกล้ 0

$$\text{ดังนั้น } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

2) จาก $a_n = n^3$ เขียนลำดับได้เป็น $1, 8, 27, 64, \dots, n^3, \dots$

จะเห็นว่า เมื่อ n มากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุด พจน์ที่ n ของลำดับจะมากขึ้นและไม่เข้า

จำนวนใดจำนวนหนึ่ง

ดังนั้น $\lim_{n \rightarrow \infty} n^3$ ไม่มีค่า

ลิมิตของลำดับในตัวอย่างที่ 21 สอดคล้องกับทฤษฎีบทต่อไปนี้ ทั้งนี้ ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตของลำดับนั้นจะนำไปใช้โดยขอผลการพิสูจน์ไว้

จากการหาในรูปที่ 5 จะเห็นว่า เมื่อ n เป็นจำนวนคู่ พจน์ที่ n เป็น 1 และเมื่อ n เป็นจำนวนคี่ พจน์ที่ n เป็น -1 ดังนั้น เมื่อ n มากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุด พจน์ที่ n ของลำดับนี้ จึงไม่เข้าใกล้จำนวนใด ๆ หนึ่ง

บทนิยาม 5

ให้ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ เป็นลำดับอนันต์ ถ้า n มากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุดแล้ว a_n เข้าใกล้ หรือเท่ากับจำนวนจริง L เพียงจำนวนเดียวเท่านั้น จะเขียน $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ (อ่านว่า ลิมิตของลำดับ a_n เมื่อ n มากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุด เท่ากับ L) และจะเรียก L ว่า ลิมิตของลำดับ (limit of a sequence) และกล่าวว่าลำดับนี้มีลิมิตเท่ากับ L เรียกลำดับอนันต์ที่มีลิมิตว่า ลำดับสู่เข้า (convergent sequence) และเรียกลำดับอนันต์ที่ไม่ใช่ลำดับสู่เข้าว่า ลำดับลู่ออก (divergent sequence)

เมื่อพิจารณาลำดับในข้อ 1) ถึง 5) จะได้ว่า

ในข้อ 1) ลิมิตของลำดับ $a_n = \frac{1}{2^n}$ เป็น 0 และลำดับนี้เป็นลำดับสู่เข้า

ในข้อ 2) ลิมิตของลำดับ $a_n = 2$ เป็น 2 และลำดับนี้เป็นลำดับสู่เข้า

ในข้อ 3) ลิมิตของลำดับ $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$ เป็น 1 และลำดับนี้เป็นลำดับสู่เข้า

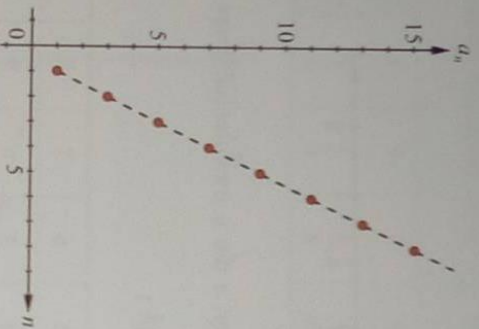
ในข้อ 4) เมื่อ n มากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุดแล้ว $a_n = 2n - 1$ ไม่เข้าใกล้จำนวนจริงใด จะกล่าวว่า ลิมิตของลำดับ $a_n = 2n - 1$ ไม่มีค่า ลำดับนี้จึงไม่ใช่ลำดับสู่เข้า ดังนั้น ลำดับ $a_n = 2n - 1$ เป็นลำดับลู่ออก

ในข้อ 5) เมื่อ n มากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุดแล้ว $a_n = (-1)^{n+1}$ ไม่เข้าใกล้หรือเท่ากับจำนวนจริงเพียงจำนวนเดียว จะกล่าวว่าลิมิตของลำดับ $a_n = (-1)^{n+1}$ ไม่มีค่า ดังนั้น ลำดับนี้จะเป็นลำดับลู่ออก และจะเรียกลำดับลู่ออกที่มีลักษณะของกราฟขึ้นและลงสลับกันโดยไม่เข้าใกล้จำนวนใดจำนวนหนึ่งเช่นนี้ว่า ลำดับแกว่งกวัด (oscillating sequence)

4) พิจารณากราฟของลำดับ เมื่อ $a_n = 2n - 1$ ในรูปที่ 4

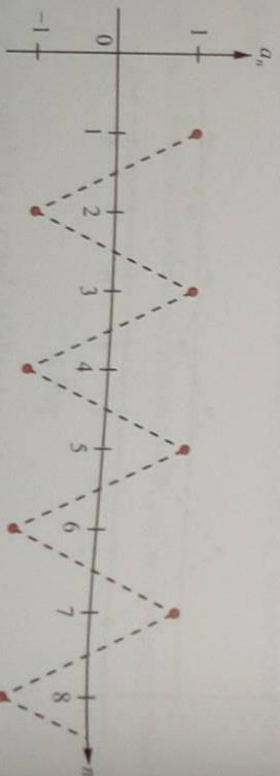
n	1	2	3	4	5	6	7	8	...
a_n	1	3	5	7	9	11	13	15	...

จากการพิจารณาในรูปที่ 4 จะเห็นว่า เมื่อ n มีค่ามากขึ้นเรื่อยๆ โดยไม่มีที่สิ้นสุด พจน์ที่ n ของลำดับจะเพิ่มขึ้นเรื่อยๆ และไม่ซ้ำกันค่าจำนวนใดจำนวนหนึ่ง



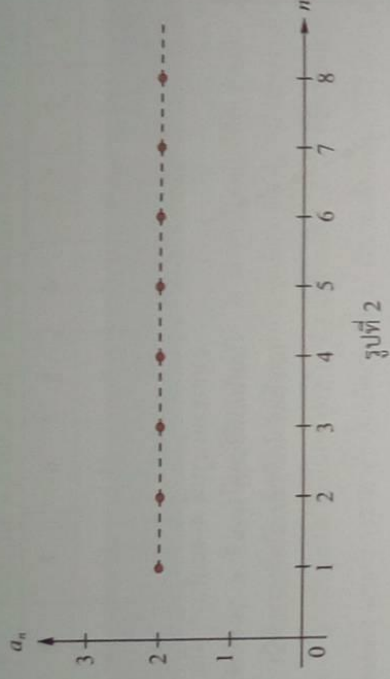
รูปที่ 4

5) พิจารณากราฟของลำดับ เมื่อ $a_n = (-1)^{n+1}$ ในรูปที่ 5



รูปที่ 5

2) พิจารณากราฟของลำดับ เมื่อ $a_n = 2$ ในรูปที่ 2

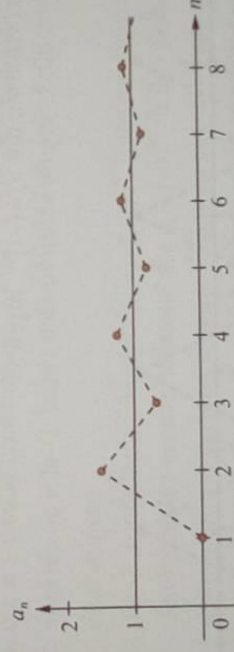


รูปที่ 2

จากกราฟในรูปที่ 2 จะเห็นว่า a_n เป็น 2 เสมอ สำหรับทุก n เมื่อ n มากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุด

3) พิจารณากราฟของลำดับ เมื่อ $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$ ในรูปที่ 3

n	1	2	3	4	5	6	7	8	...
a_n	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{9}{8}$	...



รูปที่ 3

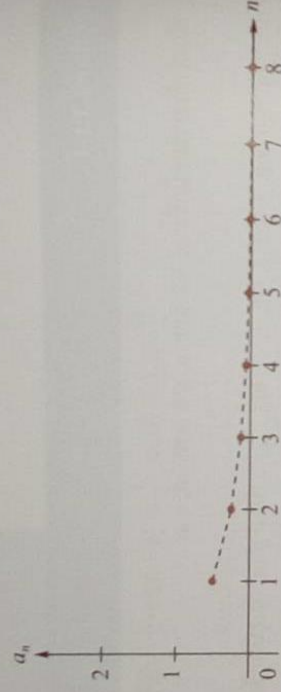
จากกราฟในรูปที่ 3 จะเห็นว่าแนวของจุดในกราฟจะเข้าใกล้เส้นตรง $y = 1$ ซึ่งหมายความว่าเมื่อ n มากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุด พจน์ที่ n จะเข้าใกล้ 1 แต่จะไม่เท่ากับ 1

1.2 ลิมิตของลำดับอนันต์

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงสมบัติบางประการของลำดับ โดยจะพิจารณาพจน์ที่ n ของลำดับ เมื่อ n มากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุด

1) พิจารณากราฟของลำดับ เมื่อ $a_n = \frac{1}{2^n}$ ในรูปที่ 1

n	1	2	3	4	5	6	7	8	...
a_n	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{256}$



รูปที่ 1

จากกราฟในรูปที่ 1 จะเห็นว่า ถ้า n มากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุดแล้ว a_n จะลดลงและเข้าใกล้ 0 มากขึ้นเรื่อยๆ

หมายเหตุ จะใช้เส้นประเพื่อแสดงให้เห็นแนวของจุด แต่เส้นประมีใช้ส่วนหนึ่งของกราฟของลำดับ